E.N.S. SEVRES & ULM 1982

Groupe A

4 h

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

On rappelle qu'une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite « de classe C^p », pour un entier $p \geqslant 0$, si elle admet des dérivées d'ordre $\leqslant p$ continues sur $\mathbb{R}$. Si g est de classe C^2, on désigne ses dérivées première et seconde par g' et g''. Lorsque g est continue, on dit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ est convergente si l'application J de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto J(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

On note $\mathcal{J}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, vérifiant, pour tout nombre réel x :

$$f(x+1) = f(x) \; ; \quad f(-x) = f(x) .$$

Soient f un élément de $\mathcal{J}$, et k un entier rationnel. Vérifier que l'expression :

$$\int_u^{u+1} f(t) \cos(2\pi kt)\,dt$$

définit un nombre réel indépendant de u, qui sera noté $\hat{f}(k)$ dans tout ce problème, et que l'on a : $\hat{f}(-k) = \hat{f}(k)$.

I

1° On considère une application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, nulle en 0 et 1.

a. A tout nombre réel λ et tout élément b de l'intervalle réel $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, on associe l'expression :

$$\Phi_b(\lambda) = \frac{1}{b}\int_0^b \varphi(t)\frac{\sin \pi\lambda t}{\sin \pi t}\,dt .$$

Montrer que $|\Phi_b(\lambda)|$ reste borné lorsque le couple (b, λ) parcourt l'ensemble $\left]0, \frac{1}{2}\right] \times \mathbb{R}$.

b. Montrer que l'application Φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\lambda \longmapsto \Phi(\lambda) = \int_0^1 \varphi(t)\frac{\sin \pi\lambda t}{\sin \pi t}\,dt$$

tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

2° Pour tout entier $N \geqslant 0$, et tout nombre réel x, on pose :

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \cos(2\pi kx) .$$

Vérifier l'identité $D_N(x) = \dfrac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin \pi x}$, et montrer que si φ désigne une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1, telle que $\varphi(0) = \varphi(1)$, la suite de terme général :

$$\Phi_N = \int_0^1 \varphi(t)\, D_N(t)\,dt$$

tend vers $\varphi(0)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

3° Soient f un élément de l'ensemble $\mathcal{J}$, et x un nombre réel. Pour tout entier $N \geqslant 0$, on pose :

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) \cos(2\pi kx) .$$

Montrer que la suite de terme général $f_N(x)$ converge vers $f(x)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

II

Dans cette partie, on considère une application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2, telle que les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} F(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} |F''(t)|\,dt$$

soient convergentes.

1° Montrer que $F'(t)$ et $F(t)$ tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

. . . / . . .

M 4 1 9 1

2° Montrer que, pour tout entier rationnel k, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} F(t) \cos(2\pi kt)\, dt$$

est convergente. On note $\tilde{F}(k)$ sa valeur. Le résultat de cette question est-il encore valable si l'on ne suppose plus que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |F''(t)|\, dt$ converge ?

3° Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} F'(n)$ est convergente. Plus généralement, montrer que lorsque x parcourt un intervalle fermé borné I de $\mathbb{R}$, la suite de fonctions $\{S_N\}_{N\geq 0}$ de I dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$x \longmapsto S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} F'(n+x)$$

converge uniformément sur I. (On pourra vérifier, pour tout entier $n \geqslant 0$, la majoration :

$$\left| \int_n^{n+1} F'(t)\, dt - F'(n+1) \right| \leqslant \int_n^{n+1} |F''(t)|\, dt.)$$

4° Montrer que, pour tout nombre réel x, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} F(n+x)$ est convergente. On note $g(x)$ sa somme.

5° Montrer que l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto g(x)$ est de classe C^1. Calculer, pour tout entier rationnel k, l'intégrale $\int_0^1 g(x) \cos(2\pi kx)\, dx$ en fonction de $\tilde{F}(k)$.

6° On suppose de plus que la fonction F est paire ($F(-t) = F(t)$) et on considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \longmapsto f(x) = g(x) + g(-x) - F(x) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} F(n+x).$$

Montrer que f appartient à l'ensemble $\mathcal{J}$. En déduire, au moyen des résultats de la partie I, que les suites de terme général :

$$u_N = 2 \sum_{k=-N}^{N} \tilde{F}(k) \qquad \text{et} \qquad v_N = \sum_{n=-N}^{N} F(n)$$

admettent des limites finies lorsque N tend vers $+\infty$, et que ces limites sont égales.

III

1° Soient $A(x, y)$ et $B(x, y)$ deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 (c'est-à-dire deux fois continûment différentiables), dont les dérivées partielles vérifient la relation :

$$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0.$$

Montrer que, pour tout couple (R, y) de nombres réels $\geqslant 0$, on a :

$$\int_{-R}^{R} (A(x, 0) - A(x, y))\, dx = \int_0^y (B(-R, u) - B(R, u))\, du$$

2° Montrer que, pour tout nombre réel y, l'expression

$$\int_{-R}^{R} e^{y^2 - x^2} \cos(2xy)\, dx$$

admet une limite finie lorsque le nombre réel R tend vers $+\infty$, et que cette limite est indépendante de y. On la notera K.

3° Soit k un entier rationnel. Pour quelles valeurs du nombre réel t l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\pi x^2 t} \cos(2\pi kx)\, dx$$

est-elle convergente ? Calculer dans ce cas sa valeur $I_k(t)$ en fonction de K, k et t.

4° Montrer que la suite de fonctions $\{\chi_N\}_{N\geq 0}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$t \longmapsto \chi_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{-\pi n^2 t}$$

converge sur $]0, +\infty[$ vers une fonction χ, continue sur $]0, +\infty[$. Au moyen des résultats de la partie II, établir, pour tout nombre réel $t > 0$, une relation liant $\chi(t)$ et $\chi\left(\frac{1}{t}\right)$, et calculer K.

5° Déterminer le premier terme du développement asymptotique de la fonction χ lorsque t tend vers 0 par valeurs réelles positives.

. . . / . . .

IV

Dans cette partie, q désigne un nombre réel de valeur absolue < 1. Pour tout entier $d > 0$, et tout nombre réel γ, on désigne par $\mathcal{C}_q(d, \gamma)$ l'ensemble des suites $\{c_k\}_{k \geqslant 0}$ de nombres réels qui vérifient, pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$c_{k+d} = c_k q^{2k} \gamma ,$$

et par $\mathcal{J}_q(d, \gamma)$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{J}$ tels que la suite $\{\hat{f}(k)\}_{k \geqslant 0}$ appartienne à $\mathcal{C}_q(d, \gamma)$.

1° Montrer que la suite de fonctions $\{\theta_{q,N}\}_{N \geqslant 0}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$x \longmapsto \theta_{q,N}(x) = \sum_{k=-N}^{N} q^{k^2} \cos(2\pi k x)$$

converge vers un élément θ_q d'un ensemble du type $\mathcal{J}_q(d_0, \gamma_0)$, pour un couple (d_0, γ_0) que l'on déterminera.

2° Soient γ un nombre réel, d un entier > 0, et f un élément de $\mathcal{J}_q(d, \gamma)$. Montrer que f est indéfiniment dérivable.

3° Soient d un entier > 0 et γ un nombre réel. Montrer que les éléments de $\mathcal{J}_q(d, \gamma)$ forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, et calculer cette dimension en fonction de d.

4° Pour tout nombre réel x, et tout entier $N \geqslant 0$, on pose :

$$\omega_{q,N}(x) = \prod_{m=1}^{N} \left((1 + q^{2m-1} \cos(2\pi x))^2 + (q^{2m-1} \sin(2\pi x))^2\right),$$

$$G_{q,N} = \prod_{m=1}^{N} (1 - q^{2m}) .$$

Montrer que les suites $\{\omega_{q,N}(x)\}_{N \geqslant 0}$ et $\{G_{q,N}\}_{N \geqslant 0}$ admettent des limites $\omega_q(x)$ et $G(q)$, toutes deux finies et non nulles, lorsque N tend vers $+\infty$. (On pourra considérer les suites de terme général $\mathrm{Log}(\omega_{q,N}(x))$ et $\mathrm{Log}\, G_{q,N}$.)

5° On note ω_q l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \omega_q(x)$ et on admet, pour la suite de ce problème, que ω_q appartient à l'ensemble $\mathcal{J}_q(d_0, \gamma_0)$. Montrer qu'il existe un nombre réel $T(q)$, ne dépendant que de q, tel que, pour tout nombre réel x, on ait :

$$\omega_q(x) = T(q)\, \theta_q(x) .$$

6° On désigne par P l'application de l'intervalle réel $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ qui, au nombre réel q, associe le produit $P(q) = T(q)\, G(q)$.

En appliquant la relation précédente aux cas $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{4}$, établir l'identité

$$P(q) = P(q^4)$$

et calculer $T(q)$ en fonction de $G(q)$.

7° On considère, chaque fois qu'elles sont définies, les expressions :

$$X(q) = 1/(\mathrm{Log}(1/q)),$$

$$\Omega(q) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{m=1}^{N} (1 - q^{2m})(1 + q^{2m-1})^2 .$$

Au moyen des résultats de la partie III, comparer les comportements asymptotiques de $X(q)$ et de $\Omega(q)$ lorsque q tend vers 1 par valeurs réelles < 1.

M 6 — 8 —

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail